Geometría III

Examen III

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría III
Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Geometría III.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Antonio Martínez López.

Descripción Parcial de los Temas 1 y 2.

Fecha 25 de noviembre de 2023.

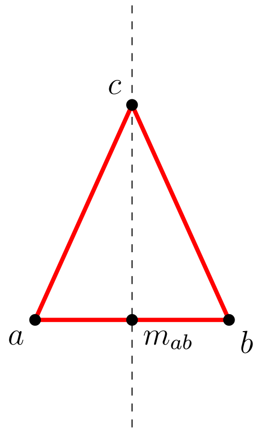
Duración 90 minutos.

Ejercicio 1 (4 puntos)**.** Estudiar si existe una aplicación afín de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ verificando

$$f(0,1) = (1,1) \qquad f(1,2) = (-1,1) \qquad f(-1,0) = (3,1) \qquad f(0,0) = (2,1)$$

En caso afirmativo, calcula su expresión matricial en el sistema de referencia usual, y decide si es o no biyectiva.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Razona que en un triángulo isósceles el incentro, circuncentro, baricentro y ortocentro están siempre alineados.



Sea $\mathbb{E}$ un espacio afín euclídeo, y sea $T = \{a, b, c\} \subset \mathbb{E}$ un triángulo isósceles con vértices a, b, c. Supongamos sin pérdida de generalidad que es isósceles por el lado $[a, b]$. Es decir, que $d(a, c) = d(b, c)$.

Veamos en primer lugar que la mediatriz del lado $[a, b]$ coincide con la bisectriz del ángulo $\widehat{c}$. Es decir, que $R_c = B_c$. De forma evidente, tenemos que $c \in B_c$. Además, como el triángulo es isósceles, tenemos que $d(a, c) = d(b, c)$, por lo que $c \in R_c$. De forma similar, es directo ver que $m_{ab} \in R_c$. Veamos ahora que $m_{ab} \in B_c$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{cm_{ab}} &= m_{ab} - c = \cancel{c} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ca} + \overrightarrow{cb}\right) - \cancel{c} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ca} + \overrightarrow{cb}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\|\overrightarrow{ca}\|}{\|\overrightarrow{ca}\|} \cdot \left(\overrightarrow{ca} + \overrightarrow{cb}\right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{ca}\| \left(\frac{\overrightarrow{ca}}{\|\overrightarrow{ca}\|} + \frac{\overrightarrow{cb}}{\|\overrightarrow{ca}\|}\right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{ca}\| \left(\frac{\overrightarrow{ca}}{\|\overrightarrow{ca}\|} + \frac{\overrightarrow{cb}}{\left\|\overrightarrow{cb}\right\|}\right) \in \overrightarrow{B_c}
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que, como el triángulo es isósceles, $d(c, a) = d(b, c)$.

Por tanto, tenemos que $m_{ab}, c \in R_c \cap B_c$, con $m_{ab} \neq c$, por lo que $R_c = B_c$. Veamos ahora que la altura respecto del vértice c coincide con la bisectriz del ángulo $\widehat{c}$, es decir, que $H_c = B_c$. De forma evidente, tenemos que $c \in B_c \cap H_c$. Además, ya hemos visto que $m_{ab} \in B_c$. Veamos ahora que $m_{ab} \in H_c$:

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{cm_{ab}}, \overrightarrow{ab} \right\rangle &= \left\langle m_{ab} - c, \overrightarrow{ab} \right\rangle = \left\langle \cancel{c} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ca} + \overrightarrow{cb}\right) - \cancel{c}, \overrightarrow{ab} \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \overrightarrow{ca} + \overrightarrow{cb}, \overrightarrow{ab} \right\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\left\langle -\overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cb}, \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cb} \right\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\left[-\|\overrightarrow{ac}\|^2 + \left\|\overrightarrow{cb}\right\|^2 - \cancel{\left\langle \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{cb} \right\rangle} + \cancel{\left\langle \overrightarrow{cb}, \overrightarrow{ac} \right\rangle} \right] \overset{(*)}{=} 0
\end{aligned}$$

donde, en la última igualdad, hemos usado que, como el triángulo es isósceles, $d(c,a) = d(b,c)$. Por tanto, $\overrightarrow{cm_{ab}} \perp \overrightarrow{ab}$ y, por tanto, $m_{ab} \in H_c$.

Por tanto, tenemos que $m_{ab}, c \in H_c \cap B_c \cap R_c$, con $m_{ab} \neq C$, por lo que $R_c = B_c = H_c$. Como $C, O, I \in R_c = B_c = H_c$, tenemos que C, O, I están alineados en dicha recta. Es decir, como coinciden la altura, la bisectriz y la mediatriz asociadas al vértice C, entonces el circuncentro, el ortocentro y el incentro están alineados.

Como además el baricentro siempre está alineado con el circuncentro y el ortocentro por el Teorema de Euler en la Recta de Euler, tenemos que los 4 puntos notables de un triángulo isósceles están alineados en la Recta de Euler.

Ejercicio 3 (4 puntos)**.** Determina el movimiento helicoidal en $\mathbb{R}^3$ cuyo eje viene dado por $e := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0,\ z = 1\}$, ángulo $\frac{\pi}{4}$ y vector de traslación $v = (2,2,0)$.